Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik II – Elektrodynamik

Prof. Dr. Jochen Hub

WS 2018/2019 **Blatt 4** **07.11.2018**

Aufgabe 12 *Elektrisches Feld einer geladenen Platte*

Gegeben ist eine dünne, homogen geladene, quatratische Platte mit Seitenlängen a und Gesamtladung Q.

a) Geben Sie die Ladungsdichte mit Hilfe der Delta-Funktion und der Heaviside-Funktion an.

(1 Punkt)

b) Berechnen Sie das elektrische Potential in der Höhe z über dem Mittelpunkt der Platte. Welche Arbeit wird geleistet, wenn eine Ladung q von außerhalb ($z = \infty$) nach $z = a/2$ transportiert wird?

Hinweis:

$$\int \frac{1}{\sqrt{A^2 + x^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(x + \sqrt{A^2 + x^2}\right)$$

$$\int_{-A}^{A} \ln \frac{\sqrt{x^2+1} + A}{\sqrt{x^2+1} - A}\,\mathrm{d}x = 8\,A \sinh^{-1} A - 4\sqrt{1 - A^2}\tan^{-1}\frac{A^2}{\sqrt{1 - A^4}}$$

(2 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass das elektrische Feld in der Höhe z über dem Mittelpunkt der Platte in der Form

$$\vec{E}(z) = 4\,\vec{e}_z\,\frac{Q}{a^2}\tan^{-1}\frac{a^2/4}{z\sqrt{z^2 + a^2/2}}$$

geschrieben werden kann. **Tipp:** Symmetrie. *(2 Punkte)*

d) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(z)$ für $a \to \infty$, falls die Flächenladungsdichte σ konstant gehalten wird. berechnen Sie außerdem $\vec{E}(z)$ für $a \ll z$. Wie interpretieren Sie die Ergebnisse?

(1 Punkt)

Aufgabe 13 *Symmetrie der Greenschen Funktion*

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Greenschen Funktion:

a) Die Greensche Funktion, die die Dirichlet-Randbedingungen erfüllt, ist symmetrisch in ihren Argumenten, d.h.

$$G_{\mathrm{D}}(\vec{x}, \vec{x}') = G_{\mathrm{D}}(\vec{x}', \vec{x}).$$

(1 Punkt)

b) Die Neumann'sche Greensche Funktion kann symmetrisiert werden durch

$$G_{\mathrm{N}}^{\mathrm{sym}}(\vec{x}, \vec{x}') = G_{\mathrm{N}}(\vec{x}, \vec{x}') - \frac{1}{S} \oint_S G_{\mathrm{N}}(\vec{x}, \vec{y})\, \mathrm{d}^2 y,$$

wobei S die Randfläche ist, auf der die Neumann Bedingung gegeben ist. *(2 Punkte)*

Hinweis: Verwenden Sie das Greensche Theorem.

Aufgabe 14 *Elektrostatik mit endlicher Photonenmasse*

Überlegen Sie, wie sich die Gesetze der Elektrostatik ändern würden, wenn neue Messungen eine korrigierte Form der Coulombkraft

$$\vec{F} = q_1 q_2 \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \left(1 + \frac{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}{\Lambda}\right) \exp\left[-\frac{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}{\Lambda}\right] \tag{1}$$

ergäben. Hierbei wäre Λ eine neue Naturkonstante. Für $\Lambda \to \infty$ geht das neue Kraftgesetz in die bekannte Coulombkraft über. Das Superpositionsprinzip soll unverändert gelten.

a) Berechnen Sie das elektrische Feld einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$, wenn Gleichung (1) als Kraftgesetz gültig wäre. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie, dass für dieses elektrische Feld ein skalares Potential existiert (rotationsfrei?). Bestimmen Sie das Potential $\Phi(\vec{x})$ einer Punktladung (das sog. Yukawa-Potential, welches eine Korrektur des elektrostatischen Potentials für eine endliche Photonenmasse darstellt). *(1 Punkt)*

c) Begünden Sie das Analogon zum Gaußschen Gesetz,

$$\oint_{\delta V} \vec{E}(\vec{x})\, \mathrm{d}^2\vec{x} + \frac{1}{\Lambda^2} \int_V \Phi(\vec{x})\, \mathrm{d}^3 x = 4\,\pi\, Q_{\mathrm{in}},$$

der "neuen" Elektrostatik, wobei Q_{in} die im Volumen eingeschlossene Ladung ist.

Anleitung: Berechnen Sie zunächst die beiden Integrale für ein Kugelvolumen, in dessen Zentrum sich eine Punktladung befindet. Betrachten Sie dann die Änderung beider Integrale, wenn das kugelförmige Volumen eine Ausstülpung hat, die durch eine Vergrößerung des Kugelradius über einem kleinen Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$ entsteht. Argumentieren Sie dann, warum das Gesetz für ein beliebiges Volumen und beliebige Ladungsverteilungen gilt. *(2 Punkte)*

d) Berechnen Sie die modifizierte Form der Poissongleichung. *(1 Punkt)*