Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik II – Elektrodynamik

Prof. Dr. Jochen Hub

WS 2018/2019 **Blatt 2** **24.10.2018**

Aufgabe 5 *Levi-Civita Tensor*

Der vollständig antisymmetrische Levi-Civita-Tensor (auch Levi-Civita-Symbol oder ε-Tensor genannt) ist definiert als

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ durch zyklische Vertauschung aus (1, 2, 3) hervorgeht.} \\ -1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ durch zyklische Vertauschung aus (2, 1, 3) hervorgeht,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit kann das Kreuzprodukt $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$ komponentenweise geschrieben werden, was Rechnungen mit Kreuzprodukten manchmal sehr vereinfacht. Um Ihre Finger zu schonen, können Sie für die folgenden Rechnungen gerne die "Einsteinsche Summenkonvention" verwenden (müssen Sie aber nicht), wonach Summenzeichen $\sum$ einfach weggelassen werden und über doppelt vorkommende Indizes summiert wird. Z.B. $\varepsilon_{ijk} a_j b_k$ meint $\sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$. Zeigen Sie mit Hilfe des ε-Tensors:

a)
$$\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

(1 Punkt)

b) Die BAC-CAB-Regel:
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

(1 Punkt)

c) Eine Produktregel für die Divergenz:
$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$$

(1 Punkt)

Aufgabe 6 *Delta-Funktion*

Die Delta-Funktion wurde zwar nicht von Paul Dirac erfunden, aber er hat ihr aber den Namen in Analogie zum Kronecker-δ gegeben. Daher wird die δ-Funktion oft Dirac'sche δ-Funktion oder nur Dirac-Funktion genannt. Die δ-Funktion findet zahlreiche Anwendungen in der Physik, zum Beispiel in der Elektrodynamik und der Quantenmechanik. Wir sammeln und zeigen einige Eigenschaften der Delta-Funktion $\delta(x)$, die in der Vorlesung eingeführt wurde. Die δ-Funktion hat die Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0)$$

a) Beweisen Sie, dass die Funktionenfolge

$$d_l(x) \begin{cases} 1/l & -l/2 \leq x \leq l/2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

für $l \to 0$ formal gegen die Delta-Funktion konvergiert. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta'(x - x_0) f(x) = -f'(x_0)$ *(1 Punkt)*

c) Die Funktion $f(x)$ habe nur einfache Nullstellen bei x_i. Beweisen Sie, dass in diesem Fall

$$\delta(f(x)) = \sum_i \left|f'(x_i)\right|^{-1} \delta(x - x_i)$$

gilt. Was ergibt sich für den Fall $f(x) = ax$? *(1 Punkt)*

d) Zeigen Sie: $\delta(x - x_0) = \Theta'(x - x_0)$ mit der Heaviside-Funktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

(1 Punkt)

e) In drei Raumdimensionen und kartesischen Koordinaten ist

$$\delta(\vec{x} - \vec{x_0}) = \delta(x - x_0)\, \delta(y - y_0)\, \delta(z - z_0)$$

Bestimmen Sie die Darstellung der Delta-Funktion in Kugel- und Zylinderkoordinaten. *(1 Punkt)*

Aufgabe 7 *Kugelsymmetrische Ladungsverteilung*

Für das Potential einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung $\rho(r)$ gilt:

$$\Phi(r) = \frac{4\pi}{r} \int\limits_0^r \rho(r')\, r'^2\, dr' + 4\pi \int\limits_r^\infty \rho(r')\, r'\, dr' \tag{1}$$

a) Verwenden Sie $\Phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$ um Gl. (1) herzuleiten. Verwenden Sie dazu Kugelkoordinaten und führen Sie die Integration über r, θ , ϕ explizit durch. (Tipp: Berechnen Sie $\Phi(\vec{x})$ entlang der z-Achse und verwenden Sie den Kosinussatz.) *(1 Punkt)*

b) Wiederholen Sie die Herleitung von Gl. (1) mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes. Verwenden Sie die integrale Form, und nutzen Sie die Symmetrie der Ladungsverteilung. *(1 Punkt)*

c) Für ein Wasserstoffatom im elektronischen Grundzustand kann die Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{x}) = e\,(\delta(\vec{x}) - |\psi(\vec{x})|^2)$$

mit $\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \exp[-|\vec{x}|/a_0]$ angenommen werden. Wenden Sie Gl. (1) an, um das elektrische Potential zu berechnen. Was erhält man für $r \ll a_0$ und $r \gg a_0$? Interpretieren Sie diese Grenzfälle physikalisch. *(1 Punkt)*

d) Was ergibt sich für eine homogene Ladungsverteilung innerhalb einer Kugel mit Radius R? Skizzieren Sie das Potential und vergleichen Sie es mit dem Potential einer Punktladung gleicher Größe. *(1 Punkt)*