Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik II – Elektrodynamik

Prof. Dr. Jochen Hub

WS 2018/2019 **Blatt 1** **17.10.2018**

Hinweise:

- Die Übungsblätter müssen zu Beginn der Mittwochsvorlesung abgegeben werden. Die Abgabe ist auch im Postfach der Arbeitsgruppe Hub (Geb E2.6, EG) möglich.
- Die Aufgaben sollen in Kleingruppen bearbeitet werden. Es dürfen bis zu drei Namen auf dem Lösungszettel stehen.
- Bitte Kennzeichnen Sie die Übungsgruppe auf Ihren Lösungszetteln.
- Zulassungsbedingungen für die Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsaufgaben und mindestens $2\times$ Vorrechnen in den Übungen.

Aufgabe 1 *Orthogonale krummlinige Koordinaten*

Ein Punkt $\vec{r} = (x, y, z)$ mit den kartesischen Koordinaten x, y and z kann ebenso durch die krummlinigen Koordinaten q_1, q_2 und q_3 beschrieben werden. Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$\vec{e_i} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \qquad \text{mit} \qquad h_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right| \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Erfüllen die Eigenvektoren die Beziehung $\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \delta_{ij}$ spricht man von orthogonalen Koordinaten. Wir legen die Reihenfolge der $\vec{e_i}$ so fest, dass sie ein Rechtssystem bilden, d.h. $\vec{e_i} \times \vec{e_j} = \vec{e_k}$, wobei (ijk) zykl. (1, 2, 3).

a) Zeigen Sie, dass der Gradient einer skalaren Funktion $\phi(q_1, q_2, q_3)$ in der Form

$$\vec{\nabla}\phi = \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{h_i}\frac{\partial \phi}{\partial q_i}\vec{e_i}$$

geschrieben werden kann.
Tipp: Schreiben Sie das Differential wie in der Vorlesung auf zwei Weisen. *(1 Punkt)*

b) **Hinweis:** Zeigen Sie zunächst: $\vec{\nabla} q_i = \vec{e_i}/h_i$.

Beweisen Sie nun

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_2 h_1 h_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial q_3}\right]$$

Hinweis:: Zeigen Sie zunächst, dass für beliebige differenzierbare Funktionen f und g gilt: $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g) = 0$. *(1 Punkt)*

c) Beweisen Sie

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{h_j h_k}\left[\frac{\partial(A_k h_k)}{\partial q_j} - \frac{\partial(A_j h_j)}{\partial q_k}\right]\vec{e_i} \quad \text{mit} \quad (ijk) \quad \text{zykl.} \quad (1,2,3)$$

(1 Punkt)

d) Herzlichen Glückwusch – Sie haben in den Aufgabenteilen a) bis c) allgemeine Ausdrücke für grad, div und rot in krummlienigen Koordinaten gefunden. Verwenden Sie diese nun, um explizite Ausdrücke für $\vec{e_i}$, grad, div und rot in Zylinderkoordinaten zu erhalten. *(1 Punkt)*

Aufgabe 2 *Integrale über Felder*

Wir üben das Berechnen von Kurven-, Oberflächen- und Volumenintergralen. Berechnen Sie folgende Integrale:

a) Kurvenintegral: $\int_C x^2y^2 + z^2 \, \mathrm{d}s$
Der Integrationsweg C ist eine Umdrehung (positive Drehrichtung) einer Schraubenlinie um die z-Achse mit Ganghöhe und Radius 1, die bei $\vec{x} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ startet. *(1 Punkt)*

b) Oberflächenintegral: $\int_P \vec{v} \, \mathrm{d}^2\vec{x}$ mit

$$P : \vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ 1 - u^2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v < 2\pi \end{matrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z^2 \end{pmatrix}$$

(1 Punkt)

c) Volumenintegral: $\int_V \mathrm{d}^3x \, \vec{v}$ mit $\vec{v}(\vec{x}) = (1 + y, x, 0)^{\mathrm{T}} / \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)^2 + 4y^2}$ über ein Volumen V der Höhe 1 mit ellipsenförmigem Querschnitt, dessen große und kleine Halbachse $a = \frac{5}{4}$, $b = \frac{3}{4}$ entlang der x- bzw. y-Achse liegen. Verwenden Sie zur Abwechslung elliptische Koordinaten: $x = \cosh u \cos v$, $y = \sinh u \sin v$ und z. *(1 Punkt)*

Aufgaben 3 und 4 werden in der ersten Übung (Woche 22.–26. Oktober) besprochen und müssen nicht schriftlich abgegeben werden.

Aufgabe 3 *Beispiele für Vektorfelder*

Gegeben sind die Vektorfelder

$$\vec{v_1}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad (|\vec{x}| > 0), \qquad \vec{v_2}(\vec{x}) = \vec{e_z} \times \vec{x},$$
$$\vec{v_3}(\vec{x}) = \frac{\vec{e_z} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^2 - (\vec{e_z} \times \vec{x})^2} \quad (x^2 + y^2 > 0), \quad \vec{v_4}(\vec{x}) = \vec{e_z}\left[R^2 - x^2 - y^2\right] \quad (x^2 + y^2 \leq R^2).$$

a) Skizzieren Sie die Felder. Welchen physikalischen Größen könnten sie entsprechen? *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{v_i}$, und die Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{v_i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. *(1 Punkt)*

c) Berechnen Sie explizit den Fluss (Kugel am Ursprung mit Radius 1) und die Zirkulation (Kreis in der x-y-Ebene mit Radius 1 und Mittelpunkt am Ursprung) der Vektorfelder. *(1 Punkt)*

Aufgabe 4 *Divergenz und Rotation in kartesischen Koordinaten (Optional)*

Gegeben sei ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$.

a) Ausgehend von der Definition der Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{v} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial(\Delta V)} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{a},$$

zeigen Sie, dass in kartesischen Koordinaten gilt: $\operatorname{div} \vec{v} = \partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y + \partial v_z/\partial z$. *(1 Punkt)*

b) Ausgehend von der Definition der Rotation, zeigen Sie:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

(1 Punkt)